

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Edson Ribeiro Alvares

Um curso sobre Categorias Derivadas

2014

0.1 Resumo da Proposta

Este mini-curso terá como foco as categorias trianguladas e a construção de algumas idéias e resultados presentes no contexto das categorias derivadas. O texto que será preparado sobre o tema, conterà muito mais do que o que realmente será abordado durante as horas de curso. Uma lista de exercícios ao final de cada aula será o condutor de muitas idéias que serão discutidas ao longo do curso. Os exemplos mais importantes de categorias derivadas, estarão dentro da teoria de representações de álgebras de dimensão finita e caso o tempo permita, falaremos de categorias de feixes.

Caso o público seja composto essencialmente por alunos de graduação, os temas a seguir serão readaptados para atingir este tipo de público durante as duas primeiras aulas.

Pré-requisitos

Noções básicas sobre categorias: Produto, coproduto, funtores, categorias aditivas e abelianas, álgebra homológica.

Aula 1 Categorias Trianguladas: O objetivo desta aula é apresentar a definição de categorias trianguladas e explorar bem ao menos o exemplo da categoria de homotopia de complexos de projetivos finitamente gerados de uma álgebra de dimensão finita. Caso o tempo permitir, apresentaremos outros exemplos.

Quanto ao texto que será preparado para o mini-curso, além dos temas acima para esta primeira aula, ele conterá os temas seguintes que estarão diretamente relacionados a primeira aula, podendo ou não serem apresentados.

- Algumas noções básicas sobre categorias: categorias, funtores, categorias aditivas e abelianas. Exemplos.
- Axiomas de Categorias trianguladas.
- Propriedades de Categorias Trianguladas
- Construção do Cone
- Exemplo: A categoria de homotopia de complexos é triangulada.
- Exercícios

Aula 2 Categorias Derivadas: Neste tópico evitaremos falar sobre localização de categorias para poder tratar bem diversos outros aspectos das categorias derivadas. O tema localização será tratado na última aula. Nesta aula, tendo já um determinado modelo em mente que foi explorado na primeira aula, exploraremos os seguintes temas:

- O mergulho $F : \text{mod } A \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ é pleno e fiel.
- Em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ temos um funtor suspensão.
- Propriedades do Funtor suspensão $[]$.
- Exercícios

Aula 3 Construção de triângulos: Nesta aula temos como objetivo mostrar a construção de triângulos a partir de sequências exatas. O tema será explorado no contexto das categorias hereditárias.

Os tópicos a seguir constarão do texto a ser preparado, podendo ou não serem explorados na aula.

- Sequência exata longa de cohomologia.
- Construção de triângulos a partir de sequências exatas.

- $Ext^i(X, Y) = Hom(X, Y[i])$.
- Exemplos: Categorias Derivadas de Categorias Hereditárias e de Categorias Semi-simples.
- Exercícios

Aula 4 Morfismos nas categorias Derivadas. Nesta aula, vamos explorar finalmente como são os morfismos nestas categorias. Como motivação, falaremos sobre a construção do anel de frações de um anel não comutativo. Caso o tempo permitir, falaremos em caráter informativo, sobre: Invariantes e Teoria de Morita. Veremos apenas alguns dos invariantes das categorias derivadas, o Teorema de Morita e o Teorema de Rickard, para isto falaremos sobre os objetos inclinantes e um pouco da história de teoria tilting.

Os tópicos principais desta aula estarão dentro do seguinte contexto:

- Anel de Frações : O objetivo desta seção é apresentar a construção do anel de frações como motivador para o entendimento do tema "localização de categorias".
- Sistema Multiplicativo: Localização de Ore de Anéis e de Categorias.
- Axiomas de Categorias Derivadas.
- Os morfismos na categoria derivada.
- Exercícios
- Bibliografia: An introduction to homological algebra. Charles Weibel.
Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras.
An introduction to homological algebra. Joseph Rotman.
Non commutative Rings - Michael Artin.
Categories Derivees et Geometrie Algebrique. Raphael Rouquier.
Derived Categories and their uses. Bernhard Keller.
Handbook of Tilting Theory. L. A. Hugel, D. Happel, Henning Krause.
Methods of Homological Algebra, S. Gelfand, Y. Manin.
Fourier Mukai Transforms in algebraic geometry. D. Huybrechts